

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

AVELINO SAMARTIN Y JESUS MARTINEZ

**reparto transversal de la sobrecarga
en tableros de puentes**

Artículo publicado en el n.º 113
de la Revista Hormigón y Acero

4.º trimestre 1974

Depósito legal: M. Sep. 853 - 1958

reparto transversal de la sobrecarga en tableros de puentes

AVELINO SAMARTIN y JESUS MARTINEZ
Ingenieros de Caminos

RESUMEN

Se presenta el cálculo de esfuerzos de una losa ortótropa rectangular apoyada en dos bordes opuestos y en los otros dos con condiciones de contorno muy generales. La formulación se realiza en forma compacta al utilizar la notación matricial, lo que permite una programación directa en un computador electrónico. La solución obtenida se compara con la que se deduce mediante el método de Guyon-Massonet-Rowe, que constituye una simplificación muy conocida, y se comentan las diferencias existentes.

Se muestra a continuación un estudio alternativo mediante la teoría de láminas plegadas prismáticas, que representa un modelo matemático más adecuado para este tipo de estructuras de tableros de puentes. Se comparan finalmente resultados numéricos entre ambas teorías.

1. LOSA ORTOTROPA

1.1. Introducción.

La determinación de los esfuerzos producidos por la sobrecarga en cierta clase de puentes en los que existe un predominio de trabajo estructural lineal, se suele dividir en dos partes: 1.^a Cálculo de esfuerzos longitudinales a todo ancho (pieza unidimensional). 2.^a Estudio de la distribución transversal de dichos esfuerzos.

Dentro de la segunda fase, y originariamente aplicado solamente a tableros de puentes simplemente apoyados (tableros de vigas, losas multicelulares, etc.), se reemplaza frecuentemente la estructura del tablero por una losa ortótropa equivalente, en la que se obtiene la distribución transversal de los diferentes esfuerzos.

Sin considerar las posibles dificultades existentes en el proceso de sustitución del tablero por una losa ortótropa, el objeto de este apartado se centra en el estudio de la losa ortótropa aisladamente.

1.2. Resumen histórico.

La idea de sustituir el análisis de una estructura discreta (emparrillado) por una estructura continua (losa ortótropa) parece ser debida a Guyon. Posteriores perfecciona-

mientos fueron realizados por Massonet (consideración de la rigidez torsional) y Rowe (efecto del coeficiente de Poisson). Este último autor en (1) presenta un estudio muy completo sobre el tema, acompañado de ábacos que facilitan extraordinariamente la aplicación del método al proyecto. Por ser esta obra muy conocida en nuestro país, a ella se referirán los resultados de este artículo. Conviene, sin embargo, observar que el trabajo de Rowe fue realizado antes de que el computador electrónico se hubiera introducido intensivamente en la ingeniería civil, por lo que se hacía necesario un nuevo planteamiento más adecuado y consistente.

En (2) se comentaron la validez y restricciones de las hipótesis de (1) exponiendo la teoría general de la placa ortótropa, pero no se presentó ningún resultado comparativo. En (3) se indicaron las limitaciones a la teoría de Guyon-Massonet-Rowe y la extendieron a un rango más amplio del parámetro α . Sin embargo, la formulación presentada allí no parece ser la más adecuada para un cálculo por ordenador.

Los autores intentan en este artículo exponer una extensión unificada y consistente de la teoría, considerando el máximo rango posible de variación del parámetro α , y sin las simplificaciones innecesarias del método de Guyon-Massonet-Rowe. Entre éstos suponer $\nu = 0$ en las condiciones de contorno, la fórmula de interpolación para valores de esfuerzos correspondientes a valores intermedios de α , que es evidentemente una simplificación muy importante, etc.

1.3. Teoría general de la losa ortótropa.

Se adoptan los ejes cartesianos trirrectangulares x_1, x_2, z (fig. 1) y se utiliza la notación que se indica en el apéndice. Detalles de los cálculos pueden verse desarrollados de forma similar en (2).

1.3.1. Ecuación general.

Utilizando el convenio de Einstein de los índices repetidos, la ecuación general de la losa ortótropa es (ver (3)):

$$k_{ij} w,_{ij} = Z(x_1, x_2) \quad (i, j = 1, 2) \quad (I)$$

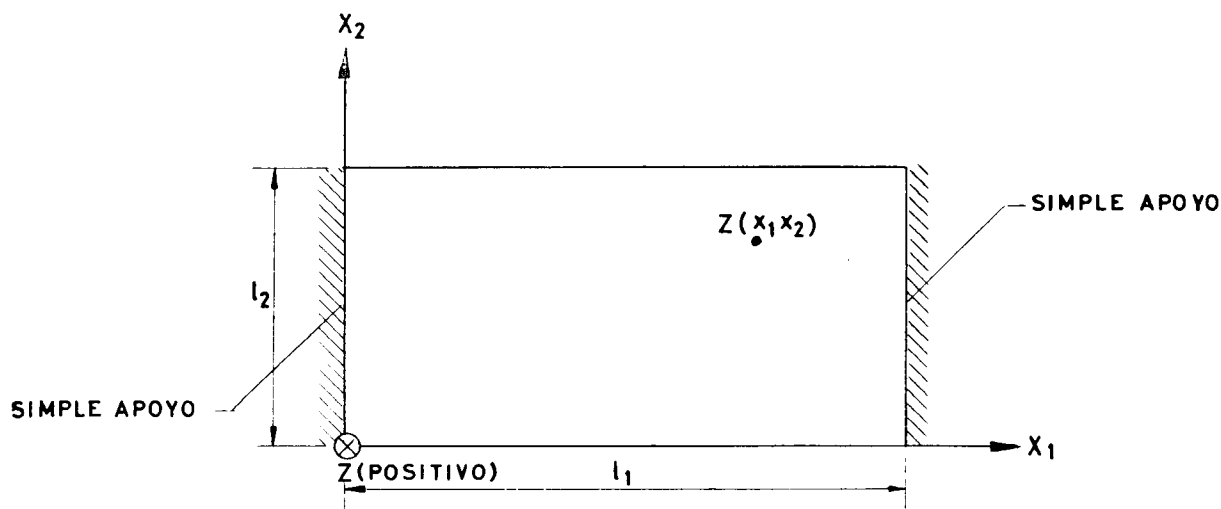


Fig. 1. — Planta losa ortótropa rectangular.

Las constantes k_{ij} pueden estar relacionadas con las características mecánicas del tablero real por las fórmulas:

$$\begin{aligned} k_{11} &= E i & k_{22} &= E j \\ d_1 &= G i_0 & d_2 &= G j_0 \\ k_1 &= \nu_1 k_{11} & k_2 &= \nu_2 k_{22} \\ 2 k_{12} &= d_1 + d_2 + k_1 + k_2 \end{aligned}$$

siendo i y j las inercias unitarias a flexión, e i_0 y j_0 las inercias unitarias a torsión, todas ellas en las direcciones 1 y 2, respectivamente.

Conviene recordar que el problema de la idealización de un tablero real mediante una losa ortótropa es un problema muy complicado, por lo menos en teoría.

El planteamiento que se sigue en el artículo supone k_1 y k_2 distintos, sin embargo, por consideraciones energéticas (teorema de reciprocidad o Betti) tiene que cumplirse que $k_1 = k_2$.

Esta igualdad, desde un punto de vista puramente matemático, equivale a expresar que la ecuación III, juntamente con las condiciones de contorno VII, es autoadjunta.

En efecto, según E. A. Coddington y N. Levinson ("Theory of Ordinary Differential Equations", McGraw-Hill, 1955), la propiedad de autoadjunto equivale a expresar que se cumple:

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{B}}^{-1} \text{ (a) } \underline{\underline{M}}^T = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{B}}^{-1} \text{ (b) } \underline{\underline{N}}^T$$

siendo en este caso:

$$\underline{\underline{B}}(x_2) = \begin{bmatrix} 0 & p_2 & 0 & p_0 \\ -p_2 & 0 & -p_0 & 0 \\ 0 & p_0 & 0 & 0 \\ -p_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a = 0 \quad b = l_2$$

Y suponiendo, por ejemplo, como condiciones de contorno ambos bordes libres:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 0 & m & 0 & -p_0 \\ m' & 0 & -p_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & -p_0 \\ n' & 0 & -p_0 & 0 \end{bmatrix}$$

con:

$$p_0 = k_{22} \quad p_2 = -2 k_{12} \lambda_{2n}^2 \quad m = n = (2 k_{12} - k_1) \lambda_{2n}^2 \quad m' = n' = k_2 \lambda_{2n}^2$$

Se puede comprobar fácilmente que la igualdad matricial anterior equivale a $k_1 = k_2$.

Un procedimiento usual de conseguir la igualdad entre k_i en la sustitución del tablero real por una losa ortótropa consiste en suponer:

$$k_1 = k_2 = \nu k_{22}$$

o bien, en otros casos:

$$k_1 = k_2 = \nu E \frac{h^3}{12}$$

siendo h el espesor del forjado y ν su coeficiente de Poisson.

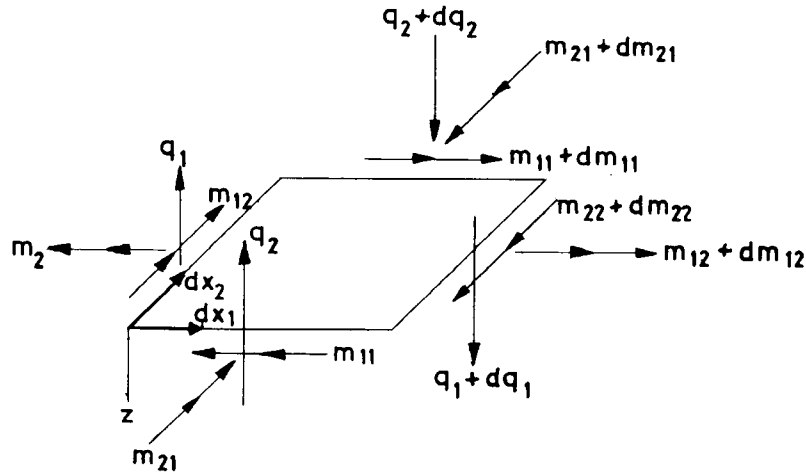


Fig. 2. — Esfuerzos actuantes.

1.3.2. Esfuerzos.

Adoptando la notación y signos de la figura 2, se tienen las fórmulas:

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= -(k_{11} w_{,11} + k_1 w_{,22}) & m_{22} &= -(k_{22} w_{,22} + k_2 w_{,11}) \\
 m_{12} &= -d_1 w_{,12} & m_{21} &= -d_2 w_{,12} \\
 q_1 &= -(k_{12} w_{,111} + (k_1 + d_2) w_{,122}) & q_2 &= -(k_{22} w_{,222} + (k_2 + d_1) w_{,112}) \\
 r_1 &= -(k_{11} w_{,111} + (2k_{12} - k_2) w_{,122}) & r_2 &= -(k_{22} w_{,222} + (2k_{12} - k_1) w_{,112})
 \end{aligned}$$

r_1 y r_2 son las reacciones de Kirchhoff, cuyas expresiones son:

$$r_1 = q_1 + m_{12,2} \quad r_2 = q_2 + m_{21,1}$$

1.3.3. Solución complementaria.

Es la solución de (I) con el segundo miembro nulo, es decir:

$$k_{ij} w_{,ijjj} = 0 \quad (\text{II})$$

Se supone simple apoyo a lo largo de $x_1 = 0$ y $x_1 = l_1$, y la solución complementaria w_c puede ponerse, por tanto, en la forma:

$$w_c = \sum_{n=1}^{\infty} w_n^*(x_2) \sin \lambda_n x_1$$

siendo:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l_1}$$

sustituyendo en (II) y considerando el término n -ésimo se obtiene:

$$k_{11} \lambda_n^4 w_n^*(x_2) - 2k_{12} \lambda_n^2 w_n^*(x_2) + k_{22} w_n^*(x_2) = 0 \quad (\text{III})$$

o bien, para simplificar la escritura, se puede omitir en lo que sigue, sin peligro de confusión, el subíndice n , con lo que (III) se convierte en:

$$k_{11} \lambda^4 w^* - 2 k_{12} \lambda^2 w^*_{,22} + k_{22} w^*_{,2222} = 0 \quad (IV)$$

Las raíces t_j ($j = 1, 2, 3, 4$) de la ecuación característica de (IV) vienen dadas por la expresión:

$$t_j = \pm \lambda \sqrt{\frac{k_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{k_{22}}}$$

siendo:

$$\Delta = k_{12}^2 - k_{11} k_{22} \quad (V)$$

Se puede presentar en los siguientes casos:

CASO I. $\Delta < 0$: Losa ortrótopa con débil rigidez a torsión (típico en puentes).

CASO II. $\Delta = 0$: Losa isótropa.

CASO III. $\Delta > 0$: Losa ortrótopa con fuerte rigidez a torsión.

Es usual llamar entrecruzamiento a la expresión:

$$\theta = \sqrt[4]{\frac{k_{11}}{k_{22}}}$$

La fórmula (V) se transforma como sigue:

CASO I:

$$t_j = \pm \lambda \theta e^{\pm \frac{\alpha}{2} i} = \pm (r \pm s i) \quad i = \sqrt{-1}$$

siendo:

$$\alpha = \arccos \frac{k_{12}}{\sqrt{k_{11} k_{22}}}$$

$$r = \lambda \theta \cos \alpha/2 \quad s = \lambda \theta \sin \alpha/2$$

CASO II:

$$t_j = \pm \lambda \theta \text{ (raíces dobles)}$$

CASO III:

$$t_j = \pm \lambda \theta e^{\pm \frac{\alpha}{2}} = \pm (r \pm s)$$

siendo:

$$\alpha = \arg c h \frac{k_{12}}{\sqrt{k_{11} k_{22}}}$$

$$r = \lambda \theta c h \alpha/2 \quad s = \lambda \theta s h \alpha/2$$

La solución complementaria que se obtiene es (1):

$$\underline{R}_c(x_2) = \underline{G} [\underline{B} \underline{P}(x_2), \underline{C} \underline{P}(l_2 - x_2)] \underline{A}_{1234}$$

siendo:

$$\underline{R}_c(x_2) = [w; w_{,1}; w_{,2}; m_{11}; m_{22}; m_{12}; m_{21}; q_1; q_2; r_1; r_2]'$$

Cada término de $\underline{R}_c(x_2)$ es la amplitud de la función $\sin(\lambda x_1)$ (términos $w; w_{,2}; m_{11}; m_{22}; q_2; r_2$) o $\cos(\lambda x_1)$ (términos $w_{,1}; m_{12}; m_{21}; q_1; r_1$):

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_{11} \lambda^2 & 0 & -k_1 & 0 \\ k_2 \lambda^2 & 0 & -k_{22} & 0 \\ 0 & -d_{12} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -d_{21} \lambda & 0 & 0 \\ k_{11} \lambda^3 & 0 & -(k_1 + d_{21}) \lambda & 0 \\ 0 & (k_2 + d_{12}) \lambda & 0 & -k_{22} \\ k_{11} \lambda^3 & 0 & -(2k_{12} - k_2) \lambda & 0 \\ 0 & (2k_{12} - k_1) \lambda^2 & 0 & -k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{1234} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \quad A_i \ (i = 1, 2, 3, 4) \text{ son constantes arbitrarias.}$$

Las restantes matrices dependen del caso de losa ortótropa:

CASO I:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -r & s \\ r^2 - s^2 & -2rs \\ -r^3 + 3rs^2 & -s^3 + 3sr^2 \end{bmatrix} \quad \underline{P}(x_2) = e^{-rx_2} \begin{bmatrix} \cos sx_2 & \sin sx_2 \\ -\sin sx_2 & \cos sx_2 \end{bmatrix}$$

CASO II:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -r & 1 \\ r^2 & -2r \\ -r^3 & 3r^2 \end{bmatrix} \quad \underline{P}(x_2) = e^{-rx_2} \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CASO III:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -r & s \\ r^2 + s^2 & -2rs \\ -r^3 - 3rs^2 & s^3 + 3sr^2 \end{bmatrix} \quad \underline{P}(x_2) = e^{-rx_2} \begin{bmatrix} Chsx_2 & Shsx_2 \\ Shsx_2 & Chsx_2 \end{bmatrix}$$

y en todos los casos:

$$\underline{C} = \underline{\delta} \underline{B} \quad \text{con} \quad \underline{\delta} = \{\delta_{ij}\} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

siendo:

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{y} \quad \delta_{ii} = (-1)^{i+1}$$

1.3.4. Solución particular.

Por definición es una solución de la ecuación (I), pero que no satisface todas las condiciones de contorno. Se puede suponer en esta solución la placa simplemente apoyada en $x_1 = 0$ y $x_1 = l_1$, con ancho infinito y se va a estudiar aquí su expresión para dos casos de cargas verticales actuantes $Z(x_1; x_2)$.

a) Cuchillo de carga situado a lo largo de $x_2 = \alpha_2$ y valor:

$$Z(x_1, x_2) = Z(x_1) \delta(x_2 - \alpha_2)$$

Se demuestra que la solución particular $\underline{R}_0(x_2)$ es:

$$\underline{R}_0(x_2) = \begin{cases} \underline{G} \underline{C} \underline{P}(\alpha_2 - x_2) \underline{A}_{12}^0 & \text{si } x_2 \leq \alpha_2 \\ \underline{G} \underline{B} \underline{P}(x_2 - \alpha_2) \underline{A}_{34}^0 & \text{si } x_2 > \alpha_2 \end{cases}$$

En donde $\underline{R}_0(x_2)$ son las amplitudes de las funciones correspondientes $\sin(\lambda x_1)$ o $\cos(\lambda x_1)$ y es una matriz análoga a la matriz $\underline{R}_c(x_2)$.

Las matrices \underline{G} , \underline{B} , \underline{C} , $\underline{P}(x_2)$ han sido definidas en 1.3.3:

CASO I:

$$\underline{A}_{12}^0 = \underline{A}_{34}^0 = \begin{bmatrix} 1/r \\ 1/s \end{bmatrix} \cdot \frac{a_n}{4 \lambda^2 \sqrt{k_{11} k_{22}}}$$

CASO II:

$$\underline{A}_{12}^0 = \underline{A}_{34}^0 = \begin{bmatrix} 1/r \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{a_n}{4 \lambda^2 \sqrt{k_{11} k_{22}}}$$

CASO III:

$$\underline{A}_{12}^0 = \underline{A}_{34}^0 = \begin{bmatrix} 1/r \\ 1/s \end{bmatrix} \cdot \frac{a_n}{4 \lambda^2 \sqrt{k_{11} k_{22}}}$$

y:

$$a_n = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} Z(x_1) \sin \lambda x_1 dx_1;$$

es decir, el n -ésimo coeficiente del desarrollo en serie de Fourier de $Z(x_1)$:

$$Z(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda x_1$$

Las condiciones de contorno impuestas corresponden a la placa de $l_2 = \infty$, y son:

$$\begin{aligned} |x_2| &\rightarrow \infty & w &\rightarrow 0 \\ x_2 &\rightarrow \alpha_2 \pm 0 & w, \quad &= 0 \\ x_2 &\rightarrow \alpha_2 \pm 0 & w, \quad &= \frac{a_n}{2 k_{11}} \end{aligned}$$

b) Carga uniforme a todo ancho y valor:

$$Z(x_1, x_2) = Z(x_1)$$

La solución particular es en este caso:

$$\underline{R}_0(x_2) = \underline{G} \underline{B}_0 \frac{a_n}{k_{11} \lambda^4}$$

siendo $\underline{B}_0 = \underline{B}$ (suponiendo $r = s = 0$ en todos los elementos de \underline{B}).

1.3.5. Solución final.

Es la solución de (I) con las condiciones de contorno:

$$\underline{R}(x_2) = \underline{R}_0(x_2) + \underline{R}_c(x_2) \quad (\text{VI})$$

La matriz \underline{A}_{1234} de $\underline{R}_c(x_2)$ se obtiene de las condiciones de borde, es decir, a lo largo de $x_2 = 0$ y $x_2 = l_2$, y se consideran a continuación dos casos importantes:

a) Condiciones homogéneas de borde.

Todas las condiciones de este tipo (correspondiente a bordes libres, apoyados o empotrados, etc.) pueden ponerse en la forma:

$$\underline{k}_{di} \begin{bmatrix} -w, \quad \\ w \end{bmatrix} + \underline{k}_{pi} \begin{bmatrix} m_{22} \\ r_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{VII})$$

Ecuación matricial que se plantea para cada borde i ($i = 1, 2$), supuesto que el borde 1 es $x_2 = 0$ y el borde 2 es $x_2 = l_2$, y siendo \underline{k}_{di} y \underline{k}_{pi} matrices diagonales (2×2) formadas por 1 y 0 exclusivamente y tales que $\underline{k}_{di} + \underline{k}_{pi} = \underline{I}_2$ (matriz unidad 2×2).

La introducción de estas condiciones de borde se realiza como sigue:

Sean:

$\underline{\alpha}_{1i}$ la matriz fila i de (1×4) de $[\underline{G} \underline{B}, \underline{G} \underline{C} \underline{P}(l_2)]$

$\underline{\alpha}_{2i}$ la matriz fila i de (1×4) de $[\underline{G} \underline{B} \underline{P}(l_2), \underline{G} \underline{C}]$

$\underline{\beta}_{1i}$ el elemento i de $\underline{G} \underline{C} \underline{P}(\alpha_2) \underline{A}^0_{12}$ ó $\underline{G} \underline{B}_0 \frac{a_n}{k_{11} \lambda^4}$

$\underline{\beta}_{2i}$ el elemento i de $\underline{G} \underline{B} \underline{P}(l_2 - \alpha_2) \underline{A}^0_{24}$ ó $\underline{G} \underline{B}_0 \frac{a_n}{k_{11} \lambda^4}$

según el caso de carga que se considere.

La matriz columna \underline{A}_{1234} se determina mediante el sistema:

$$\begin{bmatrix} \underline{k}_{d1} \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_{13} \\ \underline{\alpha}_{11} \end{bmatrix} + \underline{k}_{p1} \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_{15} \\ \underline{\alpha}_{111} \end{bmatrix} \\ \underline{k}_{d2} \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_{23} \\ \underline{\alpha}_{21} \end{bmatrix} + \underline{k}_{p2} \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_{25} \\ \underline{\alpha}_{211} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \underline{A}_{1234} = - \begin{bmatrix} \underline{k}_{d1} \begin{bmatrix} \underline{\beta}_{13} \\ \underline{\beta}_{11} \end{bmatrix} + \underline{k}_{p1} \begin{bmatrix} \underline{\beta}_{15} \\ \underline{\beta}_{111} \end{bmatrix} \\ \underline{k}_{d2} \begin{bmatrix} \underline{\beta}_{23} \\ \underline{\beta}_{21} \end{bmatrix} + \underline{k}_{p2} \begin{bmatrix} \underline{\beta}_{25} \\ \underline{\beta}_{211} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Conocido \underline{A}_{1234} se calcula $\underline{R}(x_1)$ mediante (VI).

b) Viga de borde.

Ha sido considerada en (1) y (2) y puede resumirse como sigue:

La matriz de rigidez de la viga del borde i ($i = 1, 2$) está dada en ejes locales de viga por la expresión:

$$\begin{bmatrix} m_{22} \\ r_2 \end{bmatrix}_{\text{viga}} = \underline{R}_i \begin{bmatrix} -w_{,2} \\ w \end{bmatrix}_{\text{viga}} \quad (\text{VIII})$$

con:

$$\underline{R}_i = \begin{bmatrix} -\lambda^2 G J_i & 0 \\ 0 & \lambda^4 E I_i \end{bmatrix}$$

$E I_i$ y $G J_i$ son, respectivamente, las rigideces a flexión y torsión de la viga.

Referida (VIII) a ejes generales (borde i de la losa) mediante una traslación y un giro (fig. 3) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} m_{22} \\ r_2 \end{bmatrix}_{\text{placa}} = \underline{T}_i \underline{R}_i \underline{T}'_i \begin{bmatrix} -w_{,2} \\ w \end{bmatrix}_{\text{placa}} \quad (\text{IX})$$

con:

$$\underline{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & -a_i \cos \alpha_i + b_i \sin \alpha_i \\ 0 & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \text{ matriz de transformación.}$$

la ecuación (IX) es similar a la (VII), con $\underline{k}_{di} = \underline{I}_2$ y $\underline{k}_{pi} = \underline{T}_i \underline{R}_i \underline{T}'_i$, resolviéndose entonces este caso de forma análoga al anterior.

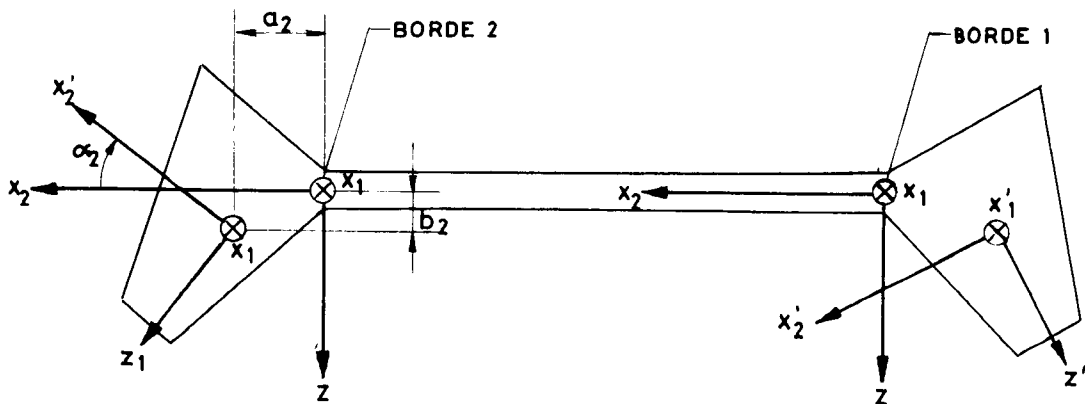


Fig. 3. — Ejes locales de la viga de borde.

1.4. Ejemplo.

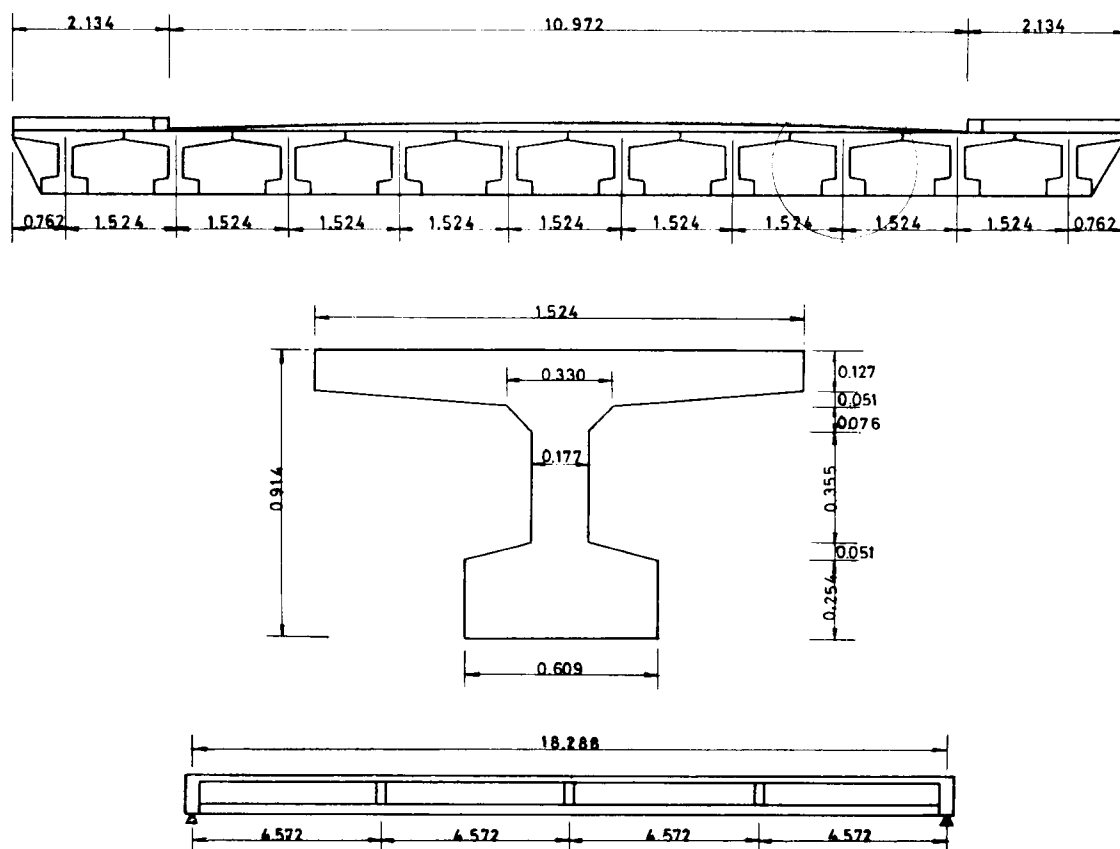


Fig. 4. — Definición del tablero del puente.

La teoría presentada en el párrafo anterior ha sido recogida en un programa escrito en Fortran IV para su proceso en un computador.

A efectos comparativos se estudia el ejemplo presentado en (1), correspondiente a los siguientes datos (fig. 4):

$$l_1 = 60 \text{ ft.} = 18,29 \text{ m.}$$

$$l_2 = 50 \text{ ft.} = 15,24 \text{ m.}$$

$$\nu_1 = \nu_2 = 0,15 \quad E = 2300000 \text{ t/m}^2.$$

$$i = 2057.2 \text{ in}^4/\text{in} = 0.033711468 \text{ m}^4/\text{m.}$$

$$j = 422.0 \text{ in}^4/\text{in} = 0.006915341 \text{ m}^4/\text{m.}$$

$$i_0 = 189.0 \text{ in}^4/\text{in} = 0.003103710 \text{ m}^4/\text{m.}$$

$$j_0 = 52.0 \text{ in}^4/\text{in} = 0.000855405 \text{ m}^4/\text{m.}$$

que corresponde a las siguientes características de la losa ortótropa, adoptando $k_1 = k_2 = \nu k_{22}$:

$$\theta = 0.62 \quad \cos \alpha = 0.1243$$

Se estudian dos situaciones: a) Líneas de influencia. b) Cálculo de esfuerzos producidos por un tren de cargas.

a) Líneas de influencia.

Por definición, el coeficiente de excentricidad de flechas es $k_w = \frac{w}{w_m}$, es decir, la relación entre la flecha w en una sección (x_1, x_2) producida por una carga excéntrica determinada y la flecha media w_m en la misma sección bajo la acción de la misma carga supuesta repartida a todo lo ancho de la losa (carga no excéntrica).

Por ejemplo, si se considera una carga puntual P actuando en la sección (α_1, α_2) , se tiene:

$$k_w = \frac{w(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)}{w(x_1, x_2, \alpha_1)} = k_w(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

siendo $w(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$ la flecha producida por P en la sección (x_1, x_2) y $w(x_1, x_2, \alpha_1)$ la flecha en la sección anterior debido a la carga uniforme a lo ancho P/l_2 actuando en α_1 .

Por reciprocidad, $w(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = w(\alpha_1, \alpha_2, x_1, x_2)$.

Conviene observar que tanto w_m como $(m_n)_m$ definido posteriormente, son funciones en general de (x_1, x_2) , coordenadas de la sección de estudio. Sin embargo, en la aplicación del método al cálculo de puentes se supone que aproximadamente son constantes a lo largo de la sección transversal x_2 . También es usual considerar a efectos de cálculo que k_w y k_m son funciones de x_2 solamente.

De las tablas 4.04 y 4.05 de la referencia (1) que contienen los valores de los coeficientes de excentricidad K_0 y K_1 (correspondientes a los casos extremos $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$) se puede determinar K_α mediante la fórmula aproximada allí recomendada.

$$k_w = K_0 + K_1 \sqrt{\alpha} = K_\alpha$$

Utilizando la teoría consistente de la losa ortrótopa desarrollada en el párrafo anterior, se obtiene K_α directamente.

De manera análoga se define el coeficiente de excentricidad de momentos longitudinales, es $k_m = \frac{m_{11}}{(m_{11})_m}$. En (1) se indica que a efectos prácticos puede suponerse $k_m = k_w$.

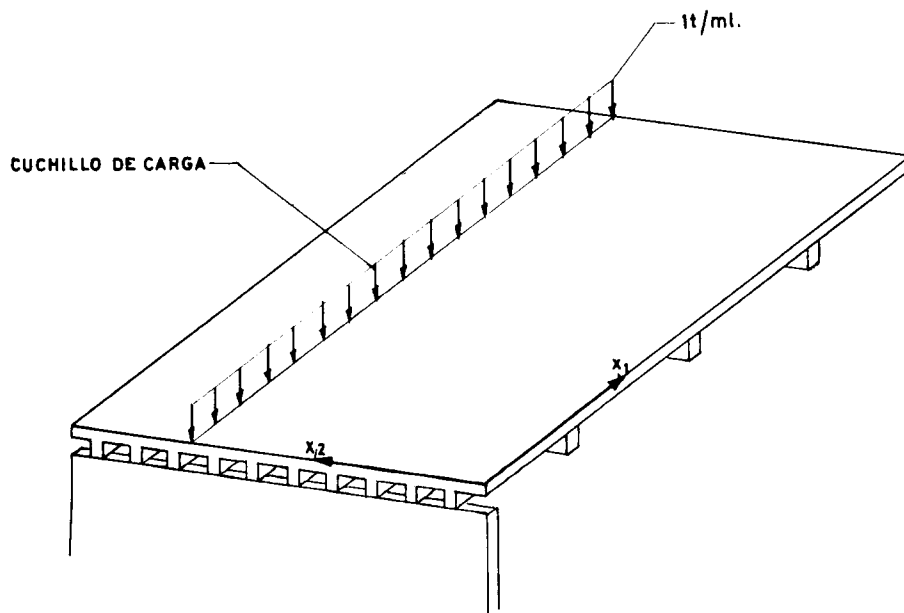


Fig. 5. — Descripción del cuchillo de carga.

TABLA I.—*Coeficientes de excentricidad de flechas. Sección $X_1 = 0.5 l_1$.*

SECCION DE ESTUDIO	SECCION DE APLICACION DE LA CARGA										Cálculo
		0	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	1.000	
SECCION DE ESTUDIO	0	4.80	3.46	2.01	1.02	0.37	— 0.04	— 0.30	— 0.52	— 0.69	A
		5.35	3.61	2.17	1.12	0.41	— 0.05	— 0.35	— 0.57	— 0.77	B
		5.30	3.59	2.18	1.12	0.41	— 0.05	— 0.35	— 0.57	— 0.77	C
	0.125	3.45	2.65	1.92	1.26	0.71	0.31	— 0.02	— 0.26	— 0.51	A
		3.61	2.81	2.00	1.28	0.71	0.28	— 0.05	— 0.32	— 0.57	B
		3.59	2.79	1.99	1.28	0.71	0.28	— 0.05	— 0.32	— 0.57	C
	0.250	2.01	1.92	1.77	1.43	1.02	0.66	0.30	— 0.02	— 0.30	A
		2.17	2.00	1.79	1.43	1.01	0.62	0.27	— 0.05	— 0.35	B
		2.18	1.99	1.78	1.42	1.01	0.62	0.27	— 0.05	— 0.35	C
	0.375	1.02	1.26	1.44	1.48	1.32	1.01	0.66	0.31	— 0.04	A
		1.12	1.28	1.43	1.47	1.28	0.96	0.58	0.28	— 0.05	B
		1.12	1.28	1.42	1.45	1.27	0.96	0.62	0.28	— 0.05	C
	0.500	0.37	0.71	1.02	1.32	1.45	1.32	1.02	0.71	0.37	A
		0.41	0.71	1.01	1.28	1.40	1.28	1.01	0.71	0.41	B
		0.41	0.71	1.01	1.27	1.39	1.27	1.01	0.71	0.41	C

TABLA II.—*Coeficientes de excentricidad de momentos. Sección $X_1 = 0.5 l_1$.*

SECCION DE ESTUDIO	SECCION DE APLICACION DE LA CARGA										Cálculo
		0	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	1.000	
SECCION DE ESTUDIO	0	4.80	3.46	2.01	1.02	0.37	— 0.04	— 0.30	— 0.52	— 0.69	A
		5.48	3.69	2.23	1.15	0.42	— 0.05	— 0.36	— 0.58	— 0.78	B
		5.10	3.57	2.24	1.17	0.42	— 0.05	— 0.36	— 0.58	— 0.78	C
	0.125	3.45	2.65	1.92	1.26	0.71	0.31	— 0.02	— 0.26	— 0.51	A
		3.61	2.91	2.07	1.32	0.72	0.28	— 0.05	— 0.33	— 0.59	B
		3.50	2.80	2.00	1.31	0.73	0.28	— 0.05	— 0.33	— 0.59	C
	0.250	2.01	1.92	1.77	1.43	1.02	0.66	0.30	— 0.02	— 0.30	A
		2.13	2.03	1.90	1.50	1.05	0.63	0.26	— 0.07	— 0.38	B
		2.14	1.97	1.80	1.44	1.04	0.64	0.27	— 0.07	— 0.38	C
	0.375	1.02	1.26	1.44	1.48	1.32	1.01	0.66	0.31	— 0.04	A
		1.05	1.27	1.49	1.59	1.35	1.00	0.62	0.25	— 0.10	B
		1.07	1.26	1.42	1.49	1.29	0.99	0.63	0.26	— 0.10	C
	0.500	0.37	0.71	1.02	1.32	1.45	1.32	1.02	0.71	0.37	A
		0.34	0.69	1.03	1.35	1.53	1.35	1.03	0.69	0.34	B
		0.35	0.69	1.02	1.29	1.43	1.29	1.02	0.69	0.35	C

TABLA III.—*Coefficientes de excentricidad de flechas. Sección $X_1 = 0.5 l_1$.*

SECCION DE ESTUDIO	SECCION DE APLICACION DE LA CARGA										Cálculo
		0	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	1.000	
SECCION DE ESTUDIO	0	4.80	3.46	2.01	1.02	0.37	— 0.04	— 0.30	— 0.52	— 0.69	A
		5.04	3.39	2.05	1.05	0.38	— 0.05	— 0.33	— 0.53	— 0.72	B
		5.00	3.39	2.06	1.06	0.38	— 0.05	— 0.33	— 0.53	— 0.72	C
	0.125	3.45	2.65	1.92	1.26	0.71	0.31	— 0.02	— 0.26	— 0.51	A
		3.52	2.74	1.96	1.25	0.69	0.27	— 0.05	— 0.31	— 0.55	B
		3.52	2.74	1.95	1.25	0.69	0.27	— 0.05	— 0.31	— 0.55	C
	0.250	2.01	1.92	1.77	1.43	1.02	0.66	0.30	— 0.02	— 0.30	A
		2.17	2.00	1.79	1.43	1.01	0.62	0.27	— 0.05	— 0.35	B
		2.18	2.00	1.78	1.43	1.02	0.62	0.27	— 0.05	— 0.35	C
	0.375	1.02	1.26	1.44	1.48	1.32	1.01	0.66	0.31	— 0.04	A
		1.13	1.30	1.45	1.49	1.29	0.98	0.62	0.28	— 0.05	B
		1.14	1.30	1.45	1.48	1.29	0.98	0.63	0.28	— 0.05	C
	0.500	0.37	0.71	1.02	1.32	1.45	1.32	1.02	0.71	0.37	A
		0.41	0.72	1.03	1.30	1.43	1.30	1.03	0.72	0.41	B
		0.41	0.72	1.03	1.30	1.42	1.30	1.03	0.72	0.41	C

TABLA IV.—*Coefficientes de excentricidad de momentos. Sección $X_1 = 0.5 l_1$.*

SECCION DE ESTUDIO	SECCION DE APLICACION DE LA CARGA										Cálculo
		0	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	1.000	
SECCION DE ESTUDIO	0	4.80	3.46	2.01	1.02	0.37	— 0.04	— 0.30	— 0.52	— 0.69	A
		5.04	3.39	2.05	1.05	0.38	— 0.05	— 0.33	— 0.53	— 0.72	B
		4.83	3.38	2.12	1.11	0.40	— 0.05	— 0.34	— 0.55	— 0.74	C
	0.125	3.45	2.65	1.92	1.26	0.71	0.31	— 0.02	— 0.26	— 0.51	A
		3.44	2.77	1.97	1.26	0.69	0.27	— 0.05	— 0.31	— 0.56	B
		3.43	2.74	1.97	1.29	0.72	0.28	— 0.05	— 0.32	— 0.57	C
	0.250	2.01	1.92	1.77	1.43	1.02	0.66	0.30	— 0.02	— 0.30	A
		2.07	1.98	1.86	1.47	1.03	0.62	0.26	— 0.06	— 0.37	B
		2.15	1.98	1.81	1.44	1.04	0.64	0.26	— 0.06	— 0.38	C
	0.375	1.02	1.26	1.44	1.48	1.32	1.01	0.66	0.31	— 0.04	A
		1.04	1.26	1.47	1.57	1.34	0.99	0.61	0.25	— 0.10	B
		1.09	1.29	1.45	1.52	1.31	1.00	0.64	0.26	— 0.10	C
	0.500	0.37	0.71	1.02	1.32	1.45	1.32	1.02	0.71	0.37	A
		0.34	0.68	1.03	1.34	1.52	1.34	1.03	0.68	0.34	B
		0.35	0.71	1.05	1.31	1.46	1.31	1.05	0.71	0.35	C

A efectos comparativos se ha supuesto que la carga actuante estaba constituida por un cuchillo de carga uniforme extendida a lo largo de la luz de la losa (fig. 5) y se ha aproximado mediante uno o varios armónicos.

En las tablas I y II se comparan los resultados A, que corresponden al método de Guyon-Massonet-Rowe, con los resultados B y C, que se deducen de la teoría de la losa ortótropa con 1 y 5 armónicos, respectivamente.

En dichas tablas I y II se ha supuesto que w_m y $(m_{11})_m$ no variaban a lo largo de la sección $x_1 = \frac{l_1}{2}$, a efectos comparativos con el método de Guyon-Massonet-Rowe, ya que la definición del texto implicaría la pérdida de la simetría en la tabla I.

En las tablas III y IV se presentan los resultados de los coeficientes de excentricidad, utilizando la definición que se indica en el texto. Se comprueba la pérdida de simetría.

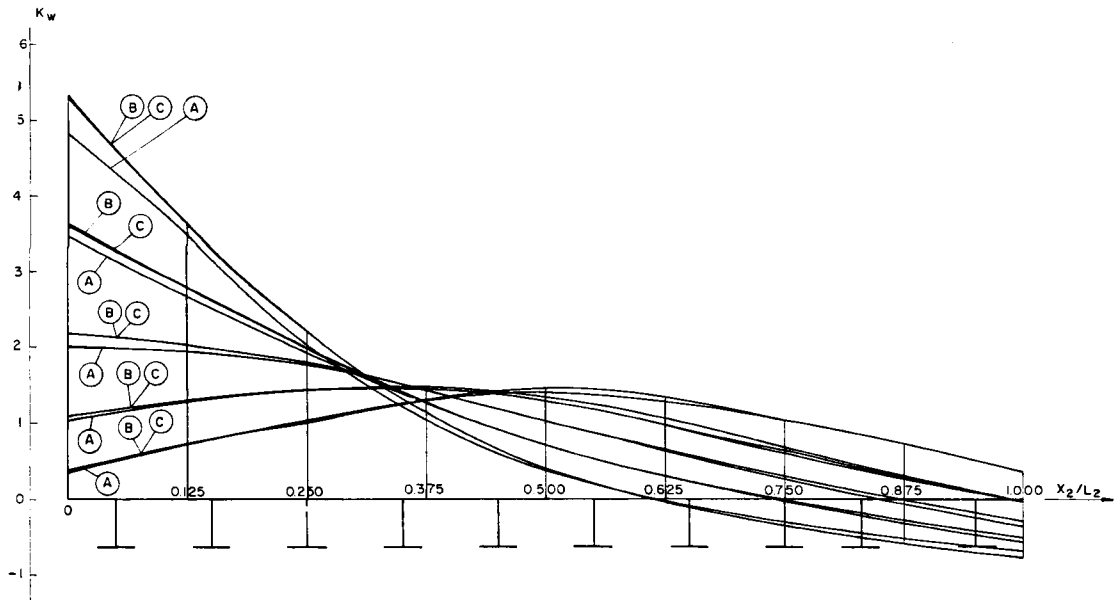


Fig. 6. — Coeficiente de excentricidad de flechas en $0.5 l_1$.

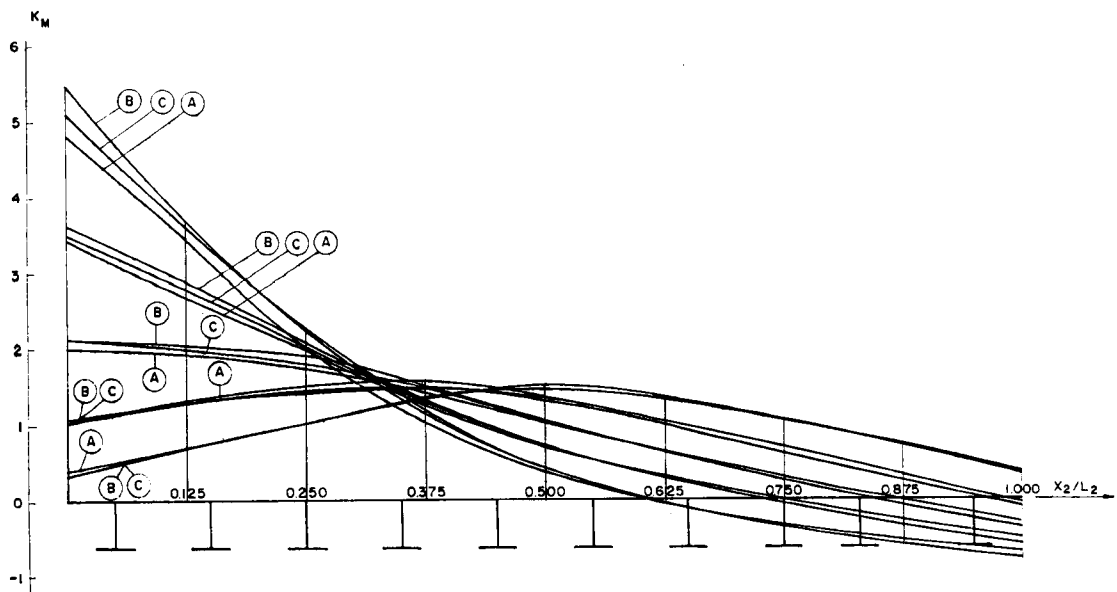


Fig. 7. — Coeficiente de excentricidad de momentos en $0.5 l_1$.

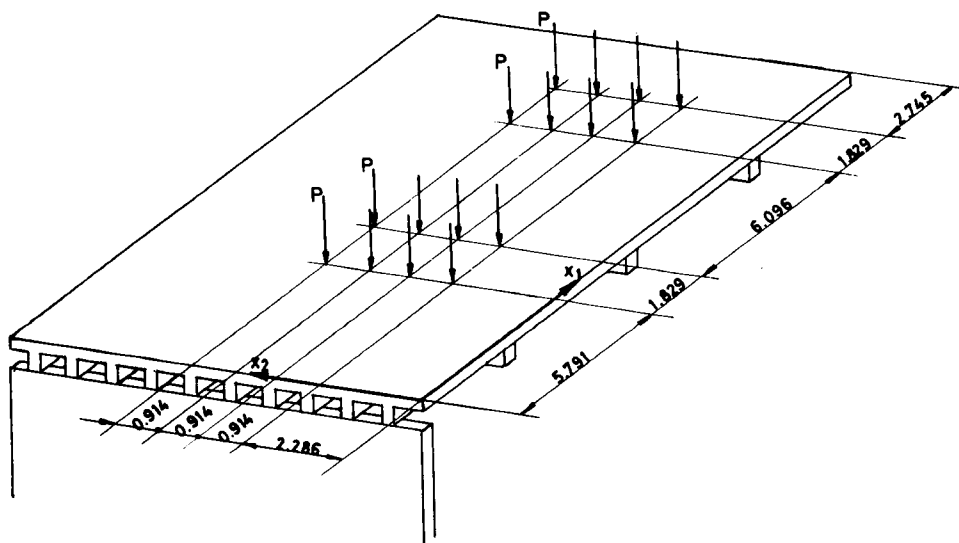


Fig. 8. — Situación del tren de cargas en el cálculo de m_{11} .

En las figuras 6 y 7 se representan las curvas obtenidas en las tablas I y II. Se puede considerar, a efectos teóricos, que la solución de la placa ortótropa con 5 armónicos es la más aproximada a una solución elástica consistente y en lo que sigue se denominará solución “exacta”.

b) Cálculo de esfuerzos producidos por un tren de cargas.

Se determina primeramente el esfuerzo m_{11} (momento flector unitario longitudinal) producido por el tren de cargas que se indica en la figura 8, obteniéndose los siguientes resultados para la sección $x_1 = 0.416 l_1$, $x_2 = 0.075 l_2$ ($x_1 = 7.609$ m; $x_2 = 1.143$ m).

Utilizando el método de la referencia (1), Guyon-Massonet-Rowe:

$$m_{11} = 1.1 \times 5.742 P = 6.020 P \text{ mt/ml.}$$

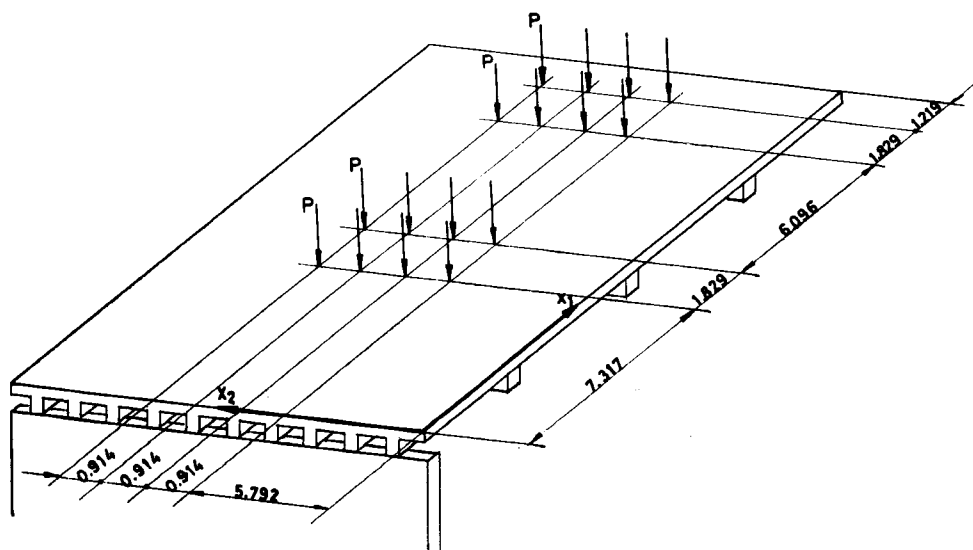


Fig. 9. — Situación del tren de cargas en el cálculo de m_{22} .

Mediante la teoría de la losa ortótropa descrita (5 armónicos):

$$m_{11} = 5.974 P \text{ mt/ml.}$$

De manera similar el esfuerzo m_{22} (momento flector unitario transversal) producido por el tren de cargas anterior situado en la posición que se indica en la figura 9, alcanza en la sección $x_1 = 0,5 l_1$ $x_2 = 0,5 l_2$ ($x_1 = 9.145$ m, $x_2 = 7.620$ m) el valor siguiente:

Según Guyon-Massonet-Rowe, $m_{22} = 1.148 P$ mt/ml.

Teoría de la losa ortótropa, $m_{22} = 1.167 P$ mt/ml.

1.5. Estudio comparativo.

La gran difusión que tiene en la actualidad el método de Guyon-Massonet-Rowe, se debe a que su aparición es anterior a la utilización intensa del computador para el cálculo de estructuras y a la existencia de ábacos muy adecuados para el proyecto [véase (1) y (5)], pero su empleo implica una serie de limitaciones y aproximaciones que se comentan a continuación:

- a) La formulación es poco adecuada para su programación en un computador.
- b) En las condiciones de contorno del borde libre se supone el coeficiente de Poisson nulo.
- c) En el cálculo de los momentos longitudinales (y flechas) se considera sólo un primer término de la serie de Fourier. La contribución de los términos despreciados se supone sustituida por un incremento arbitrario (10 por 100) de los resultados.
- d) El método sólo es aplicable a valores del parámetro torsional α , comprendidos entre 0 y 1; y la tabulación y ábacos sólo existe en número limitado de puntos y para las situaciones extremas ($\alpha = 0$ y $\alpha = 1$), adoptándose para valores intermedios de α una fórmula aproximada (lineal con $1/\alpha$).

Por el contrario, el método de la losa ortótropa exige necesariamente para su aplicación un computador, aunque de tamaño pequeño, pero la programación de la formulación matricial, tal como aquí se presenta, es inmediata y completamente general sin ninguna de las limitaciones anteriores.

Desde un punto de vista numérico se comprueba en el ejemplo que se presenta:

- a) Las líneas de influencia de flechas y momentos no coinciden.

Sin embargo, como se ha indicado en (2) y (3), se nota que los valores de las líneas de influencia para momentos flectores longitudinales debajo de la carga pueden ser mayores que los obtenidos por el método de Guyon-Massonet Rowe, multiplicados por el factor 1.1.

- b) Se comprueba, como es bien sabido, que la convergencia de las flechas es, en general, mejor que la de sus derivadas (momentos y cortantes).
- c) Los valores de desplazamientos y esfuerzos obtenidos en ambos métodos, en general, coinciden dentro de la aproximación necesaria en la práctica.

2. LAMINA PLEGADA

2.1. Introducción.

El método de la losa ortótropa, si bien estructuralmente consistente, presenta una serie de inconvenientes en su aplicación práctica al cálculo de tableros de puentes reales. La sustitución del tablero del puente por una losa ortótropa “equivalente” exige la determinación de sus características elásticas, k_{ij} ($i, j = 1, 2$) en función de la geometría del tablero (sección transversal alveolar, de vigas, etc.) y de las propiedades elásticas, problema que puede presentar serias dificultades (6). Por otro lado, la estructura del tablero formada por vigas y forjados queda encubierta por unas características medias en la losa ortótropa, que no permite dicha distinción, y, por tanto, tableros con un número reducido de vigas o con una separación muy grande entre las mismas no pueden ser analizados adecuadamente mediante la teoría de la losa ortótropa. Por último, los esfuerzos de tipo laja; por ejemplo, la distribución de las tensiones cortantes en la sección y en particular en el contacto del alma y forjado, no pueden ser determinados con este tipo de teorías.

Se ve, pues, que se hace necesario un planteamiento estructural que considere al tablero como formado por placas de forjado y vigas. Ejemplos con estas características se encuentran en los estudios desarrollados en (7), (8) y (9), entre otros.

2.2. Teoría general de las láminas plegadas prismáticas.

Es posible comprobar que utilizando los métodos matriciales de cálculo de estructuras se puede analizar cualquier estructura prismática formada por placas ortótropas y vigas, conectadas entre sí arbitrariamente, como se indica, por ejemplo, en (7) y (9). Basta para ello determinar la matriz de rigidez de la losa con fuerzas en su plano, que es muy simple, y considerar la matriz de rigidez de la losa a flexión anteriormente obtenida (caso losa ortótropa) y ensamblarlas de forma general, entre los distintos elementos, utilizando las técnicas normales de cálculo matricial de estructuras.

Sin embargo, si se utilizan hipótesis simplificadoras aceptadas para láminas plegadas largas, el esfuerzo de cálculo puede reducirse extraordinariamente con respecto al caso general.

Sin entrar en la discusión de las ventajas de dichas simplificaciones se presenta a continuación el cálculo del ejemplo anterior, sin considerar la existencia de traviesas por conveniencia del cálculo, utilizándose la teoría de láminas plegadas largas expuesta en varias publicaciones (10) y revisada en (4).

2.3. Ejemplo.

La idealización del tablero del puente de la figura 4 es inmediata en la aplicación de la teoría de láminas plegadas, y la sección transversal considerada puede verse en la figura 10.

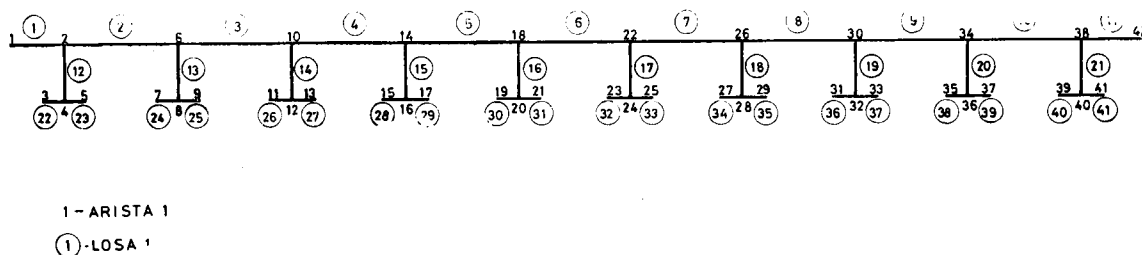


Fig. 10. — Idealización del tablero del puente mediante una estructura laminar plegada.

La idealización mediante losa ortótropa no es tan directa, y se han supuesto las siguientes características:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= 18,19 \text{ m.} \\
 l_2 &= 15,24 \text{ m.} \\
 \nu_1 &= \nu_2 = 0,15. \\
 i &= 0,033711468 \text{ m}^4/\text{m.} \\
 j &= 0,000281250 \text{ m}^4/\text{m.} \\
 i_0 &= 0,003103710 \text{ m}^4/\text{m.} \\
 j_0 &= 0,00056250 \text{ m}^4/\text{m.} \\
 E &= 2300000 \text{ t/m}^2.
 \end{aligned}$$

que corresponde a los siguientes parámetros en los que se ha considerado la condición de Betti $k_1 = k_2 = \nu_1 k_{22}$:

$$\theta = 3,309 \quad \cos \alpha = 0,2725$$

De forma similar al apartado 1.4 se estudian dos situaciones: a) Líneas de influencia. b) Cálculo de esfuerzos producidos por un tren de cargas.

a) Líneas de influencia.

Como ambos métodos, losa ortótropa y lámina plegada, exigen en general un computador, no parece adecuado para su aplicación la introducción de los conceptos de coeficiente de excentricidad, ya que los esfuerzos se obtienen directamente sin necesidad de las tabulaciones previas de los coeficientes k_w y k_m .

En las tablas V, VI y VII se representan los resultados obtenidos con los dos métodos de cálculo, correspondientes a flechas, tensiones normales de flexión longitudinal y momentos transversales, respectivamente.

Conviene aclarar que las tensiones normales longitudinales del cálculo en losa ortótropa se han deducido a partir de m_{11} mediante la fórmula siguiente:

$$S = m_{11} \frac{v}{i}$$

siendo v la distancia de la fibra neutra a la fibra media superior del ala de la sección transversal.

En este caso:

$$v = 0,2981 \text{ m.} \quad i = 0,033711468 \text{ m}^4/\text{m.}$$

resultando:

$$v/i = 8,8427 \text{ m}^{-3}$$

Por último, en la tabla VIII se representan los esfuerzos cortantes T en la unión

TABLA V.—*Flechas verticales W (mm)*

	SECCION EN ESTUDIO													
		1	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	
SITUACION DE LA CARGA	1	11.15	8.22	3.60	1.05	0.01	— 0.26	— 0.23	— 0.13	— 0.06	— 0.01	— 0.01	0.02	LOSA ORTOTOPA
	2	8.22	6.80	3.81	1.60	0.43	— 0.03	— 0.13	— 0.11	— 0.06	— 0.02	— 0.00	0.01	
	2-6	5.65	5.27	3.97	2.17	0.89	0.22	— 0.03	— 0.08	— 0.06	— 0.04	— 0.01	— 0.00	
	6	3.60	3.81	3.91	2.76	1.41	0.53	0.11	— 0.04	— 0.06	— 0.05	— 0.02	— 0.01	
	6-10	2.08	2.56	3.44	3.25	2.00	0.92	0.30	0.03	— 0.05	— 0.06	— 0.04	— 0.03	
	10	1.05	1.59	2.76	3.44	2.62	1.41	0.56	0.13	— 0.03	— 0.06	— 0.06	— 0.06	
	10-14	0.39	0.90	2.04	3.17	3.14	1.98	0.93	0.31	0.03	— 0.06	— 0.08	— 0.09	
	14	0.01	0.43	1.41	2.62	3.67	2.59	1.40	0.57	0.13	— 0.04	— 0.11	— 0.13	
	14-18	— 0.19	0.13	0.91	1.99	3.12	3.11	1.97	0.93	0.30	0.01	— 0.13	— 0.18	
	18	— 0.26	— 0.03	0.53	1.41	2.59	3.43	2.58	1.40	0.56	0.11	— 0.13	— 0.23	
	18-22	— 0.26	— 0.11	0.27	0.93	1.97	3.10	3.10	1.97	0.93	0.27	— 0.11	— 0.26	
	1	13.40	9.50	3.59	0.78	— 0.07	— 0.16	— 0.10	— 0.11	— 0.19	— 0.34	— 0.51	— 0.60	LAMINA PLEGADA
	2	9.50	7.52	3.84	1.49	0.43	0.08	— 0.02	— 0.07	— 0.16	— 0.29	— 0.44	— 0.51	
	2-6	6.15	5.58	4.06	2.19	0.94	0.32	0.07	— 0.04	— 0.13	— 0.24	— 0.36	— 0.43	
	6	3.59	3.84	4.01	2.84	1.47	0.60	0.18	— 0.00	— 0.10	— 0.19	— 0.29	— 0.34	
	6-10	1.85	2.48	3.55	3.37	2.06	0.95	0.33	0.06	— 0.06	— 0.14	— 0.22	— 0.26	
	10	0.78	1.49	2.84	3.56	2.66	1.39	0.56	0.15	— 0.01	— 0.01	— 0.16	— 0.19	
	10-14	0.20	0.84	2.11	3.26	3.16	1.94	0.88	0.30	0.05	— 0.05	— 0.11	— 0.14	
	14	— 0.07	0.43	1.47	2.66	3.37	2.52	1.32	0.53	0.15	0.00	— 0.07	— 0.11	
	14-18	— 0.16	0.20	0.97	1.99	3.09	3.05	1.88	0.87	0.31	0.07	— 0.04	— 0.09	
	18	— 0.16	0.08	0.60	1.39	2.52	3.27	2.48	1.32	0.56	0.18	— 0.02	— 0.10	
	18-22	— 0.13	— 0.02	— 0.35	0.91	1.90	3.02	3.02	1.90	0.91	0.35	— 0.02	— 0.13	

TABLA VI.—*Tensiones normales longitudinales. S (t/m²)*

	SECCION EN ESTUDIO													
		1	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	
SITUACION DE LA CARGA	1	211	160	73	21	— 0	— 5	— 5	— 3	— 1	— 0	— 0	— 1	LOSA ORTOTOPA
	2	160	132	76	32	8	— 1	— 3	— 2	— 1	— 0	— 0	— 1	
	2-6	113	103	77	44	18	4	— 1	— 2	— 1	— 1	— 1	— 1	
	6	73	76	76	55	28	11	2	— 1	— 1	— 1	— 1	— 1	
	6-10	42	52	67	63	41	18	6	0	— 1	— 1	— 1	— 1	
	10	21	32	55	67	52	28	11	3	— 0	— 1	— 2	— 2	
	10-14	8	18	41	61	61	40	19	6	0	— 1	— 2	— 3	
	14	0	9	29	52	65	51	28	11	3	— 1	— 3	— 4	
	14-18	— 4	3	18	40	60	60	40	19	6	0	— 3	— 5	
	18	— 5	— 1	11	28	51	64	51	28	11	2	— 2	— 5	
	18-22	— 5	— 1	6	19	40	60	60	40	19	6	— 1	— 5	
	1	127	121	84	47	22	8	0	— 5	— 9	— 15	— 24	— 30	LAMINA PLEGADA
	2	112	106	77	48	26	12	4	— 2	— 7	— 13	— 20	— 26	
	2-6	96	91	71	50	31	16	7	1	— 5	— 10	— 17	— 22	
	6	80	76	64	51	35	21	11	3	— 2	— 7	— 13	— 18	
	6-10	65	63	58	50	39	26	14	6	0	— 5	— 10	— 14	
	10	52	50	50	48	42	30	19	10	3	— 2	— 7	— 10	
	10-14	40	39	43	46	43	35	24	14	6	— 1	— 4	— 6	
	14	30	30	35	41	43	38	29	18	10	4	— 1	— 3	
	14-18	22	22	28	36	41	41	34	23	14	7	3	1	
	18	15	16	21	30	38	41	38	29	19	11	6	5	
	18-22	10	10	16	24	34	40	40	34	24	16	10	10	

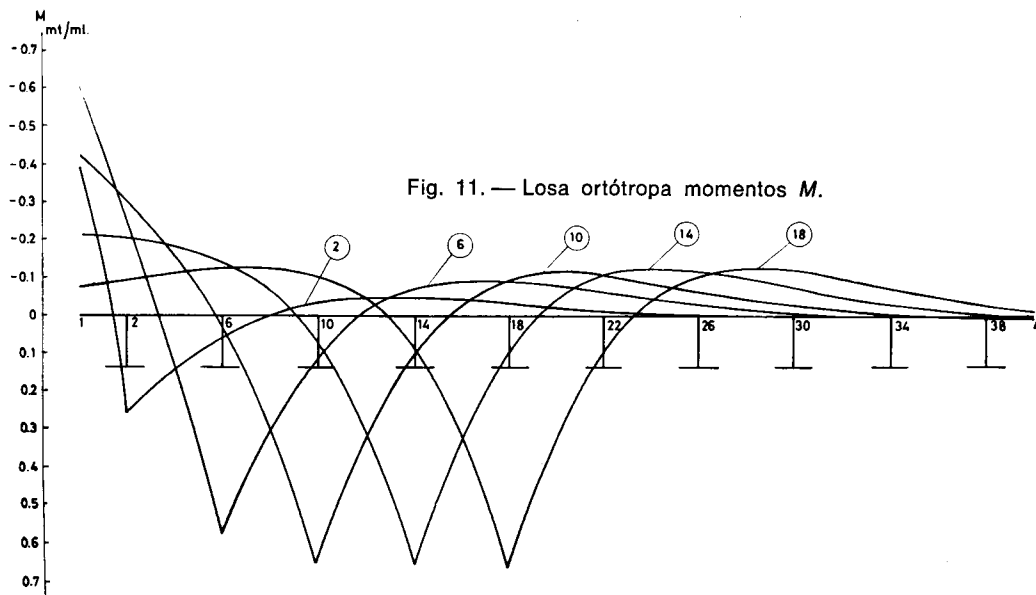


Fig. 11. — Losa ortótropa momentos M .

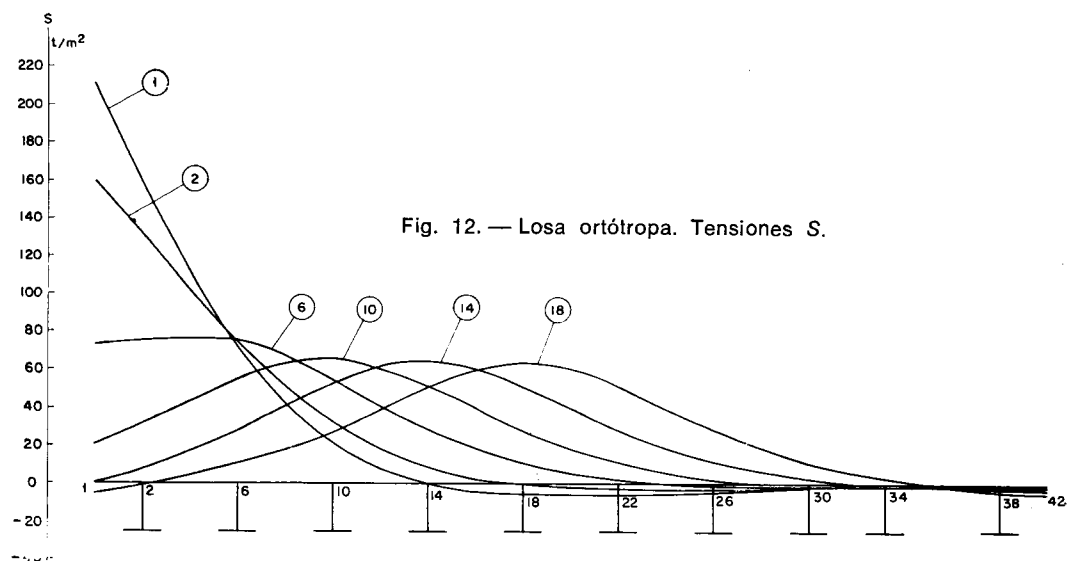


Fig. 12. — Losa ortótropa. Tensiones S .

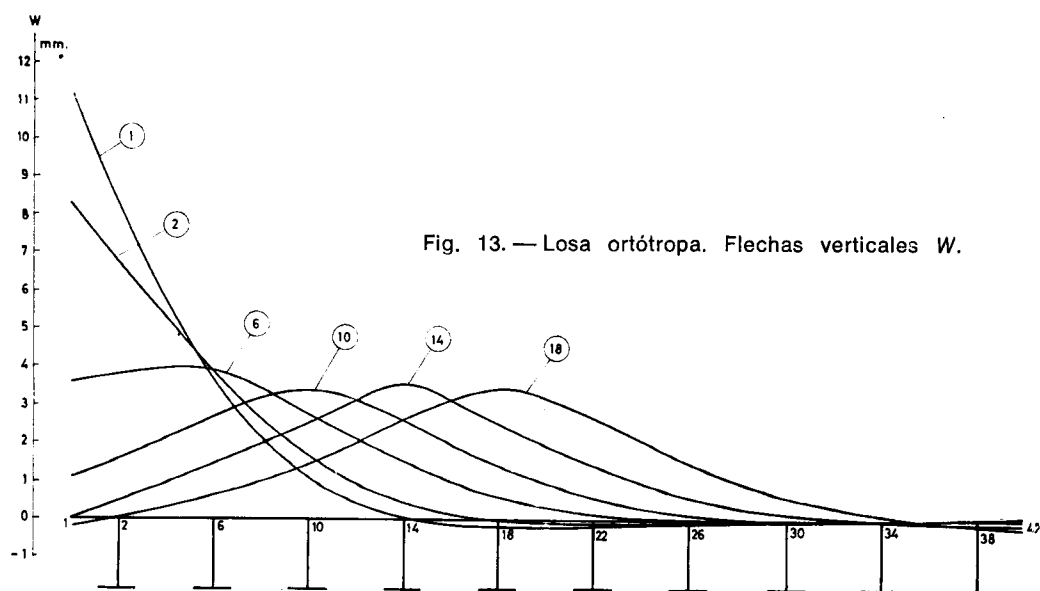


Fig. 13. — Losa ortótropa. Flechas verticales W .

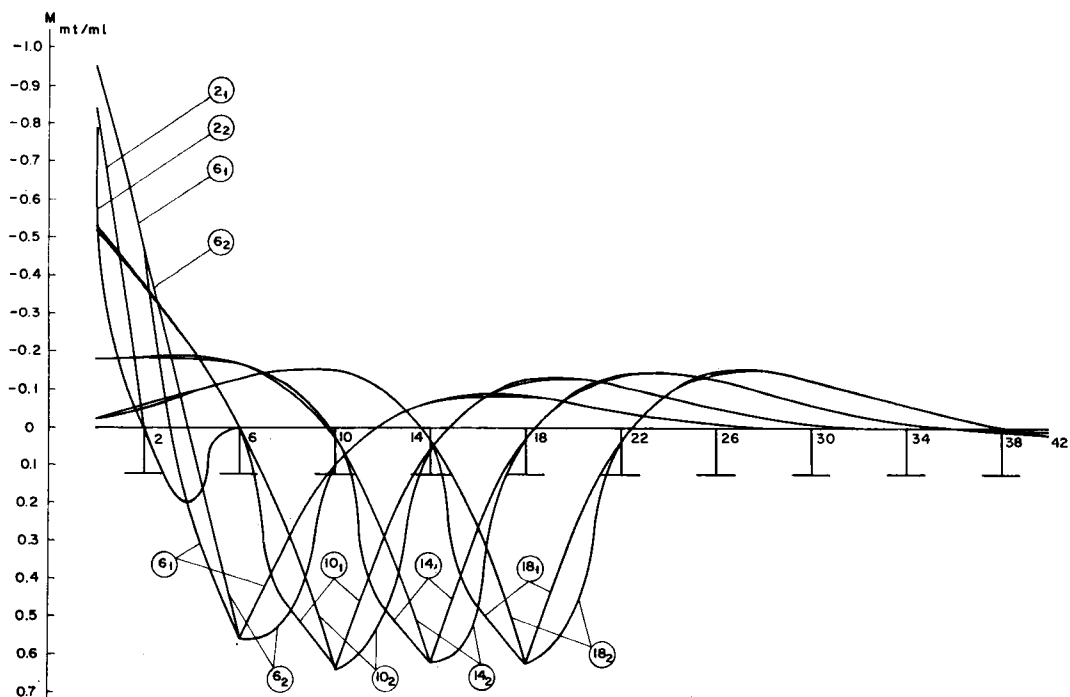


Fig. 14. — Lámina plegada momentos M .

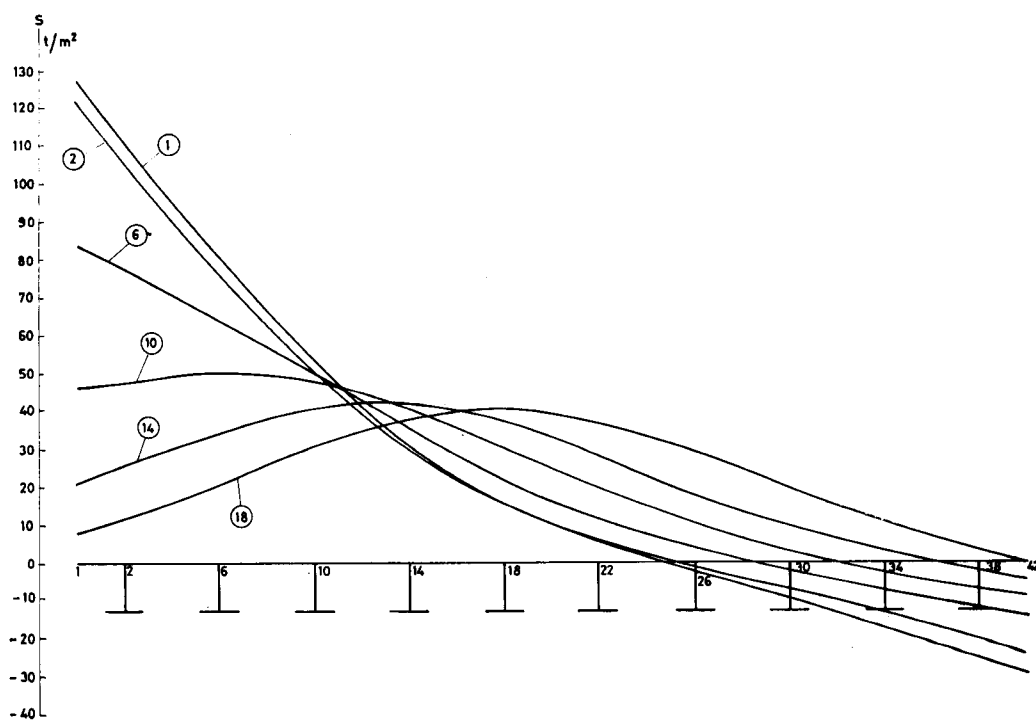


Fig. 15. — Lámina plegada. Tensiones S .

entre losas. Como es bien conocido, estos esfuerzos no pueden ser deducidos, en principio, mediante ninguna idealización del tipo de la losa ortótropa.

Las figuras 11, 12, 13, 14, 15, 16 y 17 representan los resultados deducidos mediante los métodos de la lámina plegada y losa ortótropa.

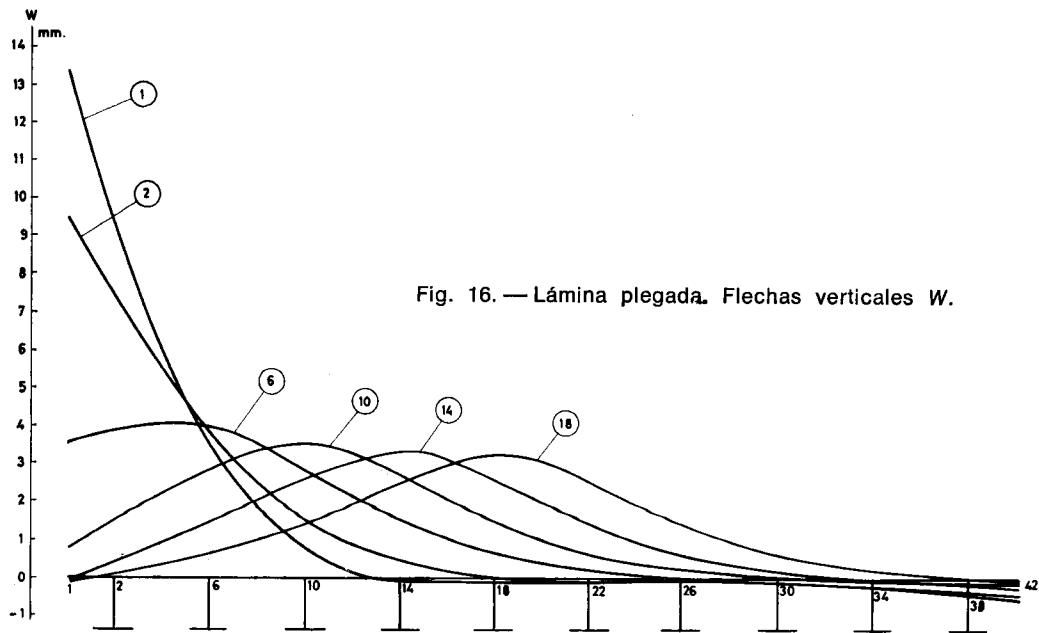


Fig. 16. — Lámina plegada. Flechas verticales W .

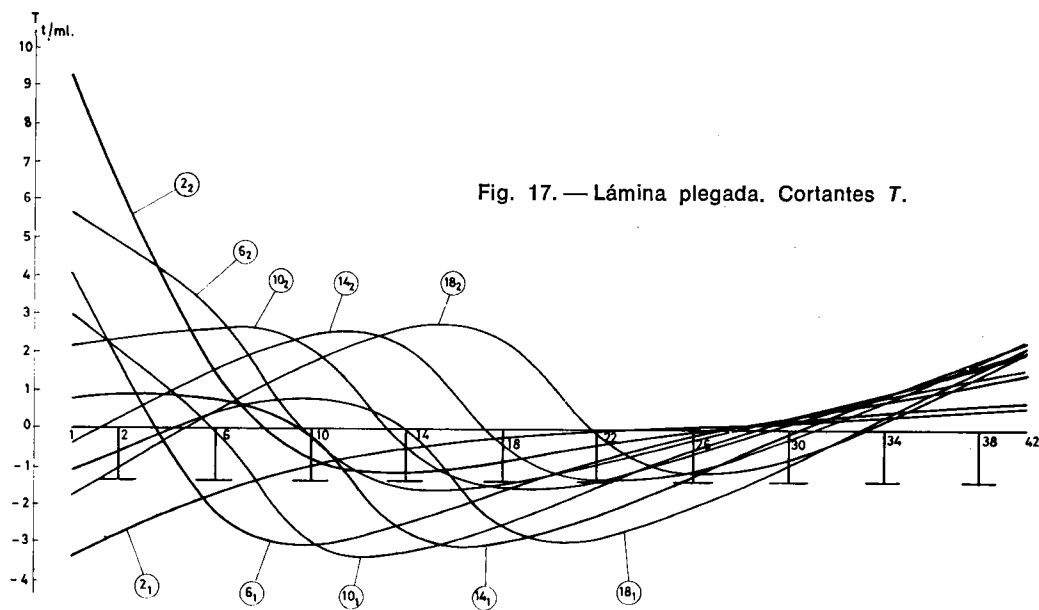


Fig. 17. — Lámina plegada. Cortantes T .

b) Cálculo de esfuerzos producidos por un tren de cargas.

El esfuerzo m_{11} (momento flector unitario longitudinal) en la sección $x_1 = 0.416 l_1$, $x_2 = 0.050 l_2$ ($x_1 = 7.609$, $x_2 = 0.762$ o la arista 2 en la lámina plegada) es según el caso:

- Losa ortótropa (5 armónicos), $m_{11} = 4.471$ m t/m l, que produce una tensión en la cara superior de la losa de $S = 8.8427 \cdot 4.471 = 40$ t/m².
- Lámina plegada (5 armónicos) resulta directamente: $S = 53$ t/m².

De forma similar se obtiene m_{22} (momento flector unitario transversal) en la sección $x_1 = 0.50 l_1$ y $x_2 = 0.50 l_2$ ($x_1 = 9.145$, $x_2 = 7.620$, que corresponde en la lámina plegada al centro del vano entre las aristas 18-22), que es según el caso:

- Losa ortótropa (5 armónicos), $m_{22} = 0.282$ m t/m l.
- Lámina plegada (5 armónicos), $m_{22} = 0.240$ m t/m l.

TABLA VII.—Momentos M (mt/ml)

		LOSA 1		LOSA 2		LOSA 3		LOSA 4		LOSA 5		LOSA 6		LOSA 7		LOSA 8		LOSA 9		LOSA 10		LOSA 11		
		1	2 ₁	2 ₂	6 ₁	6 ₂	10 ₁	10 ₂	14 ₁	14 ₂	18 ₁	18 ₂	22 ₁	22 ₂	26 ₁	26 ₂	30 ₁	30 ₂	34 ₁	34 ₂	38 ₁	38 ₂	42	
SITUACION DE LA CARGA	1	0.0	—0.39	—0.39	—0.60	—0.60	—0.42	—0.42	—0.21	—0.21	—0.08	—0.08	—0.01	—0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	LOSA ORTOTOPO
	2	0.0	0.26	—0.26	—0.24	—0.24	—0.30	—0.30	—0.20	—0.20	—0.09	—0.09	—0.03	—0.03	—0.03	—0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
	2-6	0.0	0.14	0.14	—0.14	0.14	—0.16	—0.16	—0.18	—0.18	—0.11	—0.11	—0.05	—0.05	—0.02	—0.02	—0.00	—0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
	6	0.0	0.06	0.06	0.58	0.58	0.03	0.03	—0.14	—0.14	—0.13	—0.13	—0.08	—0.05	—0.03	—0.03	—0.01	—0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
	6-10	0.0	—0.00	—0.00	0.30	0.30	0.29	0.29	—0.06	—0.06	—0.13	—0.13	—0.10	—0.10	—0.05	—0.05	—0.02	—0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
	10	0.0	—0.03	—0.03	0.11	0.11	0.66	0.66	—0.08	—0.08	—0.11	—0.11	—0.12	—0.12	—0.07	—0.07	—0.03	—0.03	—0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	
	10-14	0.0	—0.04	—0.04	—0.01	—0.01	—0.03	0.33	0.32	0.32	—0.05	—0.05	—0.13	—0.13	—0.10	—0.10	—0.05	—0.05	—0.02	0.02	0.00	0.00	0.00	
	14	0.0	—0.04	—0.04	—0.07	—0.07	0.10	0.10	0.66	0.66	0.09	0.09	—0.11	—0.11	—0.12	—0.12	—0.07	—0.07	—0.03	—0.03	—0.00	—0.00	0.00	
	14-18	0.0	—0.04	—0.04	—0.09	—0.09	—0.03	—0.03	0.32	0.32	0.32	0.32	—0.05	—0.05	—0.12	—0.12	—0.09	—0.09	—0.04	—0.04	—0.01	—0.01	0.00	
	18	0.0	—0.03	—0.03	—0.09	—0.09	—0.10	—0.10	0.09	0.09	0.66	0.66	0.09	0.09	—0.11	—0.11	—0.11	—0.11	—0.06	—0.06	—0.01	—0.01	0.00	
	18-22	0.0	—0.02	—0.02	—0.08	—0.08	—0.12	—0.12	—0.04	—0.04	0.32	0.32	0.32	0.32	—0.04	—0.04	—0.12	—0.12	—0.08	—0.08	—0.02	—0.02	0.00	
	1	0.0	—0.84	—0.79	—0.96	—0.96	—0.53	—0.52	—0.18	—0.18	—0.02	—0.02	0.02	+0.02	0.02	+0.02	0.01	+0.01	0.00	+0.00	—0.00	—0.00	0.00	LAMINA PLEGADA
	2	0.0	0.00	+0.00	—0.46	—0.45	—0.38	—0.37	—0.18	—0.18	—0.06	—0.05	—0.00	0.00	0.01	+0.01	0.01	+0.01	0.00	+0.00	—0.00	—0.00	0.00	
	2-6	0.0	0.00	+0.20	0.24	+0.04	—0.21	—0.21	—0.19	—0.18	—0.09	—0.09	—0.03	—0.03	—0.00	0.00	+0.00	0.00	+0.00	0.00	—0.00	+0.00	0.00	
	6	0.0	—0.00	+0.00	0.56	+0.56	—0.01	—0.01	—0.17	—0.17	—0.13	—0.13	—0.06	—0.06	—0.01	—0.01	0.00	+0.00	0.00	+0.00	—0.00	—0.00	0.00	
	6-10	0.0	—0.00	+0.00	0.30	+0.50	0.47	+0.27	—0.11	—0.10	—0.15	—0.15	—0.09	—0.09	—0.03	—0.03	—0.00	0.00	+0.00	0.00	—0.00	—0.00	0.00	
	10	0.0	0.00	0.00	0.10	+0.10	0.63	+0.64	0.03	+0.03	—0.15	—0.15	—0.12	—0.12	—0.06	—0.06	—0.01	—0.01	—0.00	—0.00	—0.00	+0.00	0.00	
	10-14	0.0	0.00	0.00	—0.01	—0.01	0.30	+0.50	0.47	+0.27	—0.10	—0.10	—0.15	—0.14	—0.09	—0.09	—0.03	—0.03	—0.00	—0.00	—0.00	+0.00	0.00	
	14	0.0	0.00	0.00	—0.07	—0.07	0.06	+0.06	0.62	+0.62	0.03	+0.03	—0.15	—0.14	—0.12	—0.12	—0.05	—0.05	—0.01	—0.01	—0.00	+0.00	0.00	
	14-18	0.0	0.00	0.00	—0.08	—0.09	—0.07	—0.07	0.27	+0.47	0.47	+0.27	—0.09	—0.09	—0.14	—0.14	—0.08	—0.08	—0.03	—0.03	—0.00	+0.00	0.00	
	18	0.0	0.00	0.00	—0.08	—0.08	—0.12	—0.13	0.03	+0.03	0.62	+0.62	0.03	+0.03	—0.14	—0.14	—0.11	—0.11	—0.04	—0.04	—0.00	—0.00	0.00	
	18-22	0.0	0.00	—0.00	—0.06	—0.06	—0.13	—0.13	—0.09	—0.09	0.27	—0.47	0.47	0.27	—0.09	—0.09	—0.15	—0.13	—0.06	—0.06	—0.00	0.00	0.00	

TABLA VIII.—*Cortantes T (t/ml) en $0.0 \times L$*

		LOSA 1		LOSA 2		LOSA 3		LOSA 4		LOSA 5		LOSA 6		LOSA 7		LOSA 8		LOSA 9		LOSA 10		LOSA 11		
		1	2 ₁	2 ₂	6 ₁	6 ₂	10 ₁	10 ₂	14 ₁	14 ₂	18 ₁	18 ₂	22 ₁	22 ₂	26 ₁	26 ₂	30 ₁	30 ₂	34 ₁	34 ₂	38 ₁	38 ₂	42	
SITUACION DE LA CARGA	1	0.0	3.33	9.18	—4.17	5.68	—3.07	2.19	—0.77	—0.44	1.11	—1.85	2.09	—2.37	2.34	—2.38	2.14	—2.09	1.63	—1.52	0.76	—0.53	0.0	LAMINA PLEGADA
	2	0.0	2.83	6.40	—1.87	4.83	—2.13	2.33	—0.79	—0.23	0.58	—1.09	1.45	—1.72	1.80	—1.89	1.74	—1.73	1.36	—1.29	0.65	—0.45	0.0	
	2-6	0.0	2.25	3.65	0.37	4.06	—1.20	2.50	—0.81	—0.92	0.04	—0.31	0.81	—1.07	1.25	—1.39	1.33	—1.37	1.10	—1.06	0.54	—0.54	0.0	
	6	0.0	1.68	1.35	2.11	3.01	—0.04	2.63	—0.74	1.56	—0.42	0.44	0.20	—0.41	0.70	—0.88	0.92	—1.01	0.84	—0.83	0.43	—0.30	0.0	
	6-10	0.0	1.29	—0.05	2.84	1.32	1.54	2.65	—0.46	2.09	—0.75	1.16	—0.36	0.24	0.17	—0.37	0.51	—0.65	0.57	—0.61	0.32	—0.23	0.0	
	10	0.0	0.99	—0.78	2.92	—0.29	2.91	2.17	0.26	2.45	—0.86	1.80	—0.81	0.90	—0.34	0.15	0.10	—0.27	0.30	—0.38	0.20	—0.16	0.0	
	10-14	0.0	0.75	—1.12	2.77	—1.21	3.37	0.87	1.58	2.62	—0.68	2.31	—1.11	1.53	—0.80	0.70	—0.31	0.11	0.02	—0.14	0.08	—0.10	0.0	
	14	0.0	0.56	—1.17	2.44	—1.58	3.25	—0.50	2.81	2.22	0.01	2.65	—1.18	2.10	—1.17	1.26	—0.72	0.54	—0.28	0.10	—0.05	—0.03	0.0	
	14-18	0.0	0.40	—1.06	2.02	—1.65	2.95	—1.28	3.20	0.97	1.34	2.80	—0.95	2.55	—1.40	1.82	—1.10	1.01	—0.60	0.40	—0.21	0.02	0.0	
	18	0.0	0.28	—0.85	1.56	—1.51	2.53	—1.57	3.06	—0.38	2.58	2.39	—0.21	2.86	—1.41	2.34	—1.41	1.51	—0.93	0.73	—0.41	0.09	0.0	
	18-22	0.0	0.18	—0.63	1.13	—1.26	2.04	—1.58	2.77	—1.14	2.99	1.13	1.13	2.99	—1.14	2.77	—1.58	2.04	—1.26	1.13	—0.63	0.18	0.0	

2.4. Estudio comparativo (losa ortótropa-lámina plegada).

En los resultados del ejemplo anterior pueden observarse ciertas diferencias en los valores de las flechas (w) obtenidas mediante los dos métodos, que se incrementan en el caso de los momentos flectores transversales (M) y tensiones longitudinales (S).

La explicación de esta diferencia ha de buscarse, por una parte en las características del puente, cuya relación luz/ancho es relativamente pequeña y probablemente con mayores relaciones estas diferencias serían menores. Por otro lado, el modelo matemático de la lámina plegada describe más aproximadamente el comportamiento real elástico del tablero, que la losa ortótropa. En efecto, en este último método sólo se obtienen valores medios de resultados, a lo largo de la sección transversal, ya que en su idealización no se distinguen entre vigas y forjados y sí sólo unas características medias constantes en toda la sección transversal. En cambio, el método de la lámina plegada, tal vez describe con excesivo detalle el comportamiento del tablero, reproduciendo discontinuidades de tipo local, que si bien son reales, puede carecer de importancia su consideración, en ciertos tipos de puentes, como el que constituye el ejemplo del apartado anterior. En particular, los valores de M se comprueba varían a un lado y otro de la intersección del alma con el forjado.

También puede observarse en este estudio comparativo la dificultad que surge en la obtención de las constantes (k_{ij}) de la losa ortótropa equivalente a un tablero real. A este respecto la ventaja de la lámina plegada es evidente.

3. CONCLUSIONES

Si bien un estudio más exhaustivo se hace necesario, con objeto de obtener resultados más definitivos, en particular con referencia a la importancia de la relación luz/ancho, número de vigas y su separación, espesor del forjado, forma de la sección transversal, etc., se puede presentar las siguientes conclusiones provisionales:

1. La losa ortótropa parece constituir un modelo matemático más adecuado y consistente que el método de Guyon-Massonet-Rowe. Las ventajas de este último con respecto a tabulación y simplificación en su aplicación al proyecto están actualmente muy disminuidos tras el uso extensivo del computador en la ingeniería civil.
2. La losa ortótropa, y con igual motivo el método de Guyon-Massonet-Rowe, presenta la dificultad, en su aplicación, de la traducción de las constantes físicas reales en los parámetros del modelo matemático.
3. La losa ortótropa es incapaz de obtener, en principio, los esfuerzos en el plano medio de la losa (por ejemplo, cortantes de unión entre alma y forjado).
4. La lámina plegada constituye un modelo matemático más avanzado en su representación del tablero de un puente que la losa ortótropa. En efecto, permite, por un lado, manejar situaciones de distintos tipos de sección no homogéneas (distintas separaciones o características mecánicas de las vigas longitudinales) y sus resultados, por otra parte, describen con detalle situaciones locales, tales como flexiones locales, o diferencian esfuerzos sobre alma de vigas o losas.
5. Si el número de vigas es suficientemente grande y están separadas entre sí a distancias iguales y pequeñas, la losa ortótropa puede representar con suficiente exactitud el tablero real y de forma más económica que la lámina plegada. En otros casos, esta afirmación puede no ser válida.

RECONOCIMIENTO

Todos los cálculos necesarios para el desarrollo de este estudio han sido realizados en el ordenador IBM 1130 del Gabinete de Cálculo del Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas, al cual agradecemos su eficaz y desinteresada colaboración.

NOTACION

x_1, x_2, z	= Ejes coordenados cartesianos rectangulares (fig. 1).
$Z(x_1, x_2)$	= Carga por unidad de área vertical (dirección eje 2) actuando en el punto x_1, x_2 .
v_i	= Implica derivada de la variable v respecto a x_1 ($i = 1, 2$).
V	= Implica que la variable V es una matriz o vector.
w	= Desplazamiento vertical (según el eje 2) de un punto de la superficie media de la placa.
m_{ij}	= Esfuerzo actuante en la cara j y dirección i (momento flector o tensor) ($i, j = 1, 2$).
q_i	= Esfuerzo cortante actuante en la cara i (dirección z).
E	= Módulo de elasticidad.
ν_i	= Coeficiente de Poisson, dirección i .
l_1, l_2	= Longitudes de la placa (fig. 1) (luz y ancho, respectivamente).
$\delta(x_2 - \alpha)$	= Distribución delta de Dirac, punto α y variable x_2 .
K_0, K_1, K	= Coeficiente de distribución del método de Guyon-Massonnet-Row, correspondientes a losa ortótropas para $\alpha = 0, 1$, respectivamente.
k_w	= Coeficiente de excentricidad de flechas.
k_m	= Coeficiente de excentricidad de momentos.

BIBLIOGRAFIA

1. R. E. ROWE: "Concrete Bridge Design". John Wiley and Sons, Inc., 1962.
2. A. SAMARTÍN: "Placa ortótropa rectangular". REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, junio, 1967.
3. A. R. CUSENS and R. P. POMA: "Distribution of concentrated loads on orthotropic bridge decks". The Structural Engineers, septiembre 1969.
4. A. SAMARTÍN and J. MARTÍNEZ: "A survey on Folded Plate Structures". I. A. S. S. Colloquium of Madrid, septiembre-octubre 1969.
5. P. B. MORICE and G. LITTLE: "Analysis of Right Bridge Decks Subjected to Abnormal Loading". Cement and Concrete Association, London, 1956.
6. R. BARÉS et C. MASSONET: "Le Calcul des Grillages de Poutres et Dalles Orthotropes". Ed. Dunod.
7. A. SAMARTÍN: "Una aplicación de los métodos matriciales al cálculo de puentes". Laboratorio Central de Ensayos de Materiales de Construcción, publicación número 197, 1968.
8. K. J. WILLIAM and A. C. SCORDELIS: "Analysis Orthotropic Folded Plates with Eccentric Stiffness". Report SESM 70-2 University of California, Berkeley, febrero 1970.
9. C. MEYER and A. C. SCORDELIS: "Computer Program for Prismatic Folded Plates with Plate and Beam Elements". Report SESM 70-3 University of California, Berkeley, febrero 1970.
10. K. H. CHU and S. G. PURJARKAR: "Multiple Folded Plate Structures". Journ. of Struc. Div. ASCE núm. ST 2, april, 1966.

